

### Séries de Fourier

**Exercice 1.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction  $T$ -périodique,  $\mathcal{C}^1$  par morceaux. On définit  $\check{f}(t) = f(-t)$  et  $\tau_{t_0}f(t) = f(t - t_0)$  sur  $\mathbb{R}$ .

1. Calculer alors les coefficients de Fourier  $c_n(\check{f})$ ,  $c_n(f')$  et  $c_n(\tau_{t_0}f)$  en fonction de ceux de  $f$ .
2. Dédurre de l'exercice précédent le développement en série de Fourier de  $|\cos(t)|$ .

**Solution de l'exercice 1.** •  $c_n(\check{f})$  :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(\check{f}) &= \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \check{f}(t) e^{-in\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{t=0}^T f(-t) e^{-in\omega t} dt. \end{aligned}$$

La formule magique est changement de variable,  $s = -t$

$$\begin{aligned} c_n(\check{f}) &= \frac{1}{T} \int_{s=0}^{-T} f(s) e^{in\omega s} (-ds) \\ &= \frac{1}{T} \int_{s=-T}^0 f(s) e^{in\omega s} ds \\ &= \frac{1}{T} \int_{t=-T}^0 f(s) e^{-i(-n)\omega s} ds \\ &= \frac{1}{T} \int_{t=0}^T f(s) e^{-i(-n)\omega s} ds \quad \text{car } f(s) e^{-i(-n)\omega s} \text{ est } T\text{-périodique.} \end{aligned}$$

D'où le résultat,

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(\check{f}) = c_{-n}(f).$$

•  $c_n(f')$  : La formule magique est l'intégration par parties mais en **dérivant** l'exponentielle complexe naturellement,

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f') &= \frac{1}{T} \int_{t=0}^T f'(t) e^{-in\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} [f(t) e^{-in\omega t}] - \frac{1}{T} \int_{t=0}^T f(t) (-in\omega) e^{-in\omega t} dt \\ &= \frac{f(T) e^{-in\frac{2\pi}{T}T} - f(0)}{T} + in\omega \frac{1}{T} \int_{t=0}^T f(t) (-in\omega) e^{-in\omega t} dt \\ &= \frac{f(T) - f(0)}{T} + in\omega c_n(f). \end{aligned}$$

Comme la fonction  $f$  est  $T$ -périodique, le premier terme est nul, on conclut donc, et directement pour tous les entiers  $n \in \mathbb{Z}$  (même  $n = 0$ )

$$c_n(f') = in\omega c_n(f).$$

•  $c_n(\tau_{t_0}f)$  : La formule magique est le changement de variable. Comme vu en cours mais je le refais puisque la définition de  $\tau_{t_0}f$  est  $t \mapsto f(t - t_0)$  et non  $t \mapsto f(t + t_0)$  (ce qui ne change pas grand chose).

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(\tau_{t_0}f) &= \frac{1}{T} \int_{t=0}^T \tau_{t_0}f(t) e^{-in\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{t=0}^T f(t - t_0) e^{-in\omega t} dt. \end{aligned}$$

Par le changement de variable  $s = t - t_0$ ,

$$\begin{aligned} c_n(\tau_{t_0}f) &= \frac{1}{T} \int_{s=-t_0}^{T-t_0} f(s) e^{-in\omega s - in\omega t_0} ds \\ &= \frac{1}{T} \int_{s=0}^T f(s) e^{-in\omega s - in\omega t_0} ds \quad \text{car } f(s) e^{-in\omega s - in\omega t_0} \text{ est } T\text{-périodique} \\ &= e^{-in\omega t_0} \frac{1}{T} \int_{s=0}^T f(s) e^{-in\omega s} ds. \end{aligned}$$

D'où,

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(\tau_{t_0}f) = e^{-in\omega t_0} c_n(f).$$

Pour la question 2, il faut se servir de la série de Fourier de  $|\sin(t)|$  et voir que  $|\cos(t)| = |\sin(t - \frac{\pi}{2})| = \tau_{\pi/2} |\sin|(t)$ .

**Exercice 2.** Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $[0, 2\pi]$  dont la dérivée  $f'$  est dans  $L^2([0, 2\pi])$ . On suppose que  $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$ . Montrer alors que

$$\int_0^{2\pi} f^2(x) dx \leq \int_0^{2\pi} f'^2(x) dx,$$

et discuter du cas d'égalité.

**Solution de l'exercice 2.** Avec la bonne formule des coefficients de Fourier de la dérivée, par la formule de Parseval (puisque  $f'$  est  $L^2([0, 2\pi])$ ),

$$\int_0^{2\pi} f'^2(x) dx = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f')|^2.$$

D'après l'exercice précédent,

$$\int_0^{2\pi} f'^2(x) dx = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |in\omega|^2 |c_n(f)|^2$$

Ici  $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f'^2(x) dx &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 |c_n(f)|^2 \\ &= 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} n^2 |c_n(f)|^2 \end{aligned}$$

Or pour tout  $n \in \mathbb{Z}^*$ ,  $n^2 \geq 1$  donc

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f'^2(x) dx &\geq 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |c_n(f)|^2 & (1) \\ &= 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \quad \text{car, par hypothèse, } c_0(f) = \int_0^{2\pi} f(x) dx = 0 \\ &= \int_0^{2\pi} f^2(x) dx. \end{aligned}$$

**L'inégalité isopérimétrique.**

Maintenant on suppose que l'on peut paramétriser le bord  $\partial\Omega$  d'un domaine du plan  $\Omega$  par une fonction  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  vérifiant  $f(0) = f(2\pi)$  (la fonction  $f$  peut être étendue en une fonction  $2\pi$ -périodique) puisque le domaine est fermé (on fait le tour du bord quand  $t$  varie entre 0 et  $2\pi$  et en  $t = 2\pi$  on est revenu à notre point de

départ). On suppose  $f \in \mathcal{C}^1$ , c'est dire que le bord du domaine est assez lisse. A partir de là on peut supposer, quitte à reparamétriser,  $f$  telle que  $|f'| = \frac{L}{2\pi}$  où  $L$  est la longueur totale du bord,  $L = \int_{t=0}^{2\pi} |f'(t)| dt$ . Par une merveilleuse formule, formule de Green-Riemann, qui nous dit qu'intégrer une fonction sur tout le domaine  $\Omega$  peut revenir à intégrer la fonction (un peu modifiée) uniquement sur le bord  $\partial\Omega$ , on obtient l'égalité suivante que l'on parachute ici,

$$-2i\mathcal{A} = \int_{t=0}^{2\pi} f(t)\bar{f}'(t) dt,$$

où  $\mathcal{A}$  est l'aire du domaine  $\Omega$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} 2\mathcal{A} &= \left| \int_{t=0}^{2\pi} f(t)\bar{f}'(t) dt \right| \\ &\leq \int_{t=0}^{2\pi} |f(t)\bar{f}'(t)| dt. \end{aligned}$$

Donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$2\mathcal{A} \leq \sqrt{\int_{t=0}^{2\pi} |f(t)|^2 dt \int_{t=0}^{2\pi} |f'(t)|^2 dt}.$$

Par ce qui précède, on obtient,

$$2\mathcal{A} \leq \int_{t=0}^{2\pi} |f'(t)|^2 dt = \int_{t=0}^{2\pi} \frac{L^2}{4\pi^2} dt = \frac{L^2}{2\pi}$$

Finalement,

$$4\pi\mathcal{A} \leq L^2.$$

### Cas d'égalité.

Si  $\int_0^{2\pi} f^2(x) dx = \int_0^{2\pi} f'^2(x) dx$ , cela implique nécessairement que l'inégalité (1) est une égalité. Donc,

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad n^2 c_n(f) = c_n(f).$$

En effet par l'absurde s'il existe un  $n_0 \in \mathbb{Z}$  tel que  $n^2 c_{n_0}(f) > c_{n_0}(f)$  alors puisque l'on a toujours  $\forall n \neq n_0, \quad n^2 c_n(f) \geq c_n(f)$  qui implique

$$\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{n_0\}} n^2 c_n(f) \geq \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{n_0\}} c_n(f).$$

En ajoutant l'inégalité stricte pour  $n_0$  on obtient alors

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 c_n(f) > \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f).$$

ce qui contredit le fait que (1) soit une égalité. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad n^2 c_n(f) = c_n(f).$$

Et on conclut que

$$\forall n \notin \{-1, 1\}, \quad c_n(f) = 0.$$

Ainsi seuls les coefficients  $c_1(f)$  et  $c_{-1}(f)$  sont non nuls. Puisque la série de Fourier est finie par l'exercice 10, la fonction  $f$  est égale à sa série de Fourier et donc,

$$f(t) = c_1(f) e^{it} + c_{-1}(f) e^{-it}.$$

Et dans l'inégalité isopérimétrique ?

Le cas d'égalité implique l'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Donc  $|f|$  est colinéaire (ou proportionnel) à  $|f'|$ . Or par hypothèse,  $|f'|$  est constante égale à  $\frac{L}{2\pi}$ . Donc la fonction  $f$  traçant le bord de  $\Omega$  est de module constant... Nécessairement c'est un cercle !